Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Profesor: ______________

Nombre: ______________
Carnet: ______________
Sección: ______________

Matemáticas I (MA-1111)
Septiembre-Diciembre 1985
Tercer examen parcial (40%)
Tipo único
Duración: 1 hora y 50 minutos

Pregunta 1. (1 punto cada una)

a) Halle $\frac{d(\mathrm{sen}^{-1}(x))}{dx}$.
b) Halle la ecuación de la recta tangente a $y = x^2$ en (-2,4).
c) Si $f(x) = x^3 - 15x + 9$, hallar $f^{(3)}(0)$.
d) Si $f(x) = \tan^{-1}(x)$, halle $c \in (0,1)$ que satisfaga el Teorema del Valor Medio.
e) Halle el rango de $g(x) = \tan^{-1}(x) + \cot\mathrm{an}^{-1}(x)$.
f) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{2x^3}$.
g) Si $f(x) = \mathrm{sen}(x) + \cos(x)$, halle $f^{(2009)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
h) Si f es derivable y $x > 0$, calcule $\frac{df(\sqrt{x})}{dx}$.
i) Si $f(g(x))=x$ y $f'(x) = 1 + f^2(x)$, halle $g'(x)$.
j) Halle dos funciones elementales estudiadas en el curso que se ajusten a las condiciones de la pregunta i y a su resultado ¿Solo un par de funciones se ajustan?

Pregunta 2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. De ser verdadera una afirmación, justifique por qué, de ser falsa, proporcione un contraejemplo.
(2 puntos cada una).

a) Una función continua en [a,b] es derivable en (a,b).
b) El hecho de que para $f(x) = 2 - |2x - 1|$ no exista un valor de $c \in (0,3)$ para el cual se cumpla que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$ contradice el Teorema del Valor Medio.
c) El teorema de Rolle puede aplicarse a la función $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo (-2,2).

Pregunta 3. (3 puntos cada una).

a) Dada la función inyectiva $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, en la cual son conocidos los siguientes datos: $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}\sqrt{7}$.
Calcule $(f^{-1})'(\sqrt{6})$.
b) Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (5,9) y son tangentes a la función $y = x^2$.

Pregunta 4. (4 puntos cada una).

a) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 2 \\ ax - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$, halle los valores de las constantes a y b para que f(x) sea diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

b) Suponiendo que y es función de x, definida implícitamente por la ecuación $x + \sqrt{xy} + y = 1$, halle $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

Pregunta 5. (5 puntos cada una).

a) Dada la función $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4x - 4}{2x^3 - 2x^2}$ determine lo siguiente:

a.1) (1 punto) Dominio;
a.2) (1 punto) Puntos críticos;
a.3) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento;
a.4) (1 punto) Puntos de inflexión;
a.5) (1 punto) Intervalos de concavidad.

b) P es un punto en el primer cuadrante sobre la curva $y = 7 - x^2$. Por P se traza una tangente a la curva y sean A y B los puntos en que corta a los ejes coordenados. Hallar la ordenada de P para que el segmento AB sea mínimo.

Pregunta 1.

a) $\frac{d(\text{sen}^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
b) $y = -4x - 4$
c) $f^{(3)}{}_{(0)} = 6$
d) $c = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$
e) $\text{Rango}\big(g(x)\big): \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{2x^3} = \frac{1}{6}$
g) $f^{(2009)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
h) $\frac{df(\sqrt{x})}{dx} = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
i) $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
j) f(x)=tan(x); g(x)=tan^{-1}(x). Son las únicas funciones elementales estudiadas en el curso que se ajustan a las condiciones planteadas y a su resultado.

Pregunta 2.

a) Falso.
b) Falso.
c) Verdadero.

Pregunta 3.

a) $(f^{-1})'(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{3}}{5}$
b) $L_1 \equiv y = 18x - 81;\ L_2 \equiv y = 2x - 1$

Pregunta 4.

a) $a = 2;\ b = 4$
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-2}{2-x-2y};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(2+\left(\frac{2x+y-2}{2-x-2y}\right)\right)(2-x-2y)+(2x+y-2)\left(1+2\left(\frac{2x+y-2}{2-x-2y}\right)\right)}{(2-x-2y)^2}$*

*En la parte b de la pregunta 4 se despeja $\sqrt{xy}$ de la expresión $x + \sqrt{xy} + y = 1$, obteniéndose: $\sqrt{xy} = 1 - x - y$, y se sustituye esto en la primera derivada.

Pregunta 5.

a) $\mathrm{a.1)\ Domf(x):\ \mathbb{R} - \{0,1\}.}$

$\mathrm{a.2)}$ No hay puntos singulares ni puntos frontera.

Hay un punto estacionario en $x = 2$ (punto $(2,2)$), el cual representa un mínimo local.

No hay mínimos globales, y no hay ningún tipo de máximo.

$\mathrm{a.3)}$ $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $[2, \infty)$ y decreciente en $(0,1)$ y en $(1,2]$.

$\mathrm{a.4)}$ No hay puntos de inflexión.

$\mathrm{a.5)}$ $f(x)$ posee concavidad hacia arriba en todo su dominio.

b) Sea y_0 la ordenada de P; $y_0 = \frac{49}{8}$